ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 61, No. 1, 1988

SOUS-POTENTIELS D'UN OPERATEUR NONLINEAIRE

BY

LOUISE BARTHÉLEMY ET PHILIPPE BÉNILAN

Equipe de Mathématiques au Besançon, CNRS, UA 741, Université de Franche-Compte, 25030 Besançon Cedex, France

ABSTRACT

Let A be a (nonlinear) operator in an ordered linear space X with resolvant $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ well-defined on X and non-decreasing for any small $\lambda > 0$, and $v \in X$. We define sub-potential of v with respect to A, as any $u \in X$ satisfying $u \leqq J_\lambda(u + \lambda v)$ for small $\lambda > 0$, and show that this coincides with the notion of sub-solution of the equation $Au \ni v$ in some abstract cases where such notion is defined in a natural way. At last, we give some general properties of sub-potentials, in particular an extension of the Kato inequality when X is a lattice, and, for good set of constraints U, existence of a largest solution for the control problem: $u \in U$ and u is a sub-potential of v with respect to A.

Beaucoup de problèmes peuvent être énoncés de la manière suivante:

(1) trouver, dans un ensemble de contraintes U, la plus grande sous-solution u d'une équation $Au = v$

où A est un opérateur d'un espace vectoriel ordonné X contenant U.

Une première question qui se pose à la lecture du problème (1) est la signification de l'expression "u est sous-solution de l'équation $Au = v$". Lorsque X est un espace vectoriel topologique ordonné, et A un opérateur linéaire de domaine de définition $D(A)$ dense, une définition naturelle est

$$\langle A^*u^*, u\rangle \leqq \langle u^*, v\rangle \quad \text{pour tout } u^* \in D(A^*) \text{ avec } u^* \geqq 0 \tag{2}$$

où A^* est l'opérateur transposé de A dans le dual X' de X. Evidemment la propriété (2) n'offre d'intérêt que s'il y a suffisamment d'éléments $u^* \in D(A^*)$ avec $u \geqq 0$, c'est à dire si $D(A^*)$ est suffisamment riche, conformément à la

Reçu le 15 juin 1987

terminologie de la théorie du potentiel. Ceci est en particulier satisfait si la résolvante $J_\lambda = (1 + \lambda A)^{-1}$ est définie et positive pour $\lambda > 0$ suffisamment petit et J_λ équicontinues.[†]

La notion précédente de sous-solution n'admet pas d'extension dans le cadre non-linéaire; ceci n'est pas le cas pour l'approche variationnelle: supposons $X = L^2(\Omega)$, où Ω est un espace mesuré, et que A soit la restriction à X d'une application $\mathcal{A}$ de V dans V', où V est un espace de Banach contenu dans X avec injection continue dense, de telle sorte que X s'injecte continuement dans le dual V'; alors il est évidemment naturel pour $u \in V$ tel que $\mathcal{A}u \leqq v$ dans V', de dire que u est sous-solution de $Au = v$.

Malgre son intérêt considérable, l'approche variationnelle n'épuise pas la notion de sous-solution. En effet, dans le cas linéaire la notion variationnelle ne coincide pas avec celle définie par (2): considérant par exemple Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N$, $V = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{A}u = -\Delta u$ de telle sorte que $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, la notion de sous-solution définie par (2) est plus générale que celle obtenue par la méthode varationnelle, puisque (2) est équivalent à

$$(u - \varepsilon)^+ \in H_0^1(\Omega) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0, \qquad -\Delta u \leqq v \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Aussi, la méthode variationnelle ne recouvre pas tous les exemples d'opérateurs nonlinéaires.

Pour cette raison nous développons ici une notion de sous-solution de l'équation $Au = v$, que nous appellerons sous-potentiel de v (par rapport à A), pour la classe des opérateurs nonlinéaires A dont les résolvantes $J_\lambda = (1 + \lambda A)^{-1}$ sont croissantes, que nous appellerons pré-générateurs: par definition u sera dit sous-potentiel de v si $u \leqq J_\lambda(u + \lambda v)$.

Comme nous le verrons, cette notion de sous-solution est équivalente à (2) dans le cas d'un pré-générateur linéaire à domaine dense et résolvantes équicontinués (cf. Proposition 2.3); dans le cadre variationnel, avec les notations ci-dessus on a $u \in V$ et $\mathcal{A}u \leqq v$ si et seulement si u est sous-potentiel de v et il existe $w \in V$ minorant u (cf. Proposition 2.7). Il apparait clairement que cette notion de sous-solution est bien adaptée à travers l'extension nonlinéaire de l'inégalité de Kato (cf. Proposition 1.4).

Mais c'est surtout pour la résolution du problème (1) que cette notion a été introduite: de façon immédiate, avec notre définition, si U est sup-complet et l'ensemble des solutions de (1) est non vide et majoré, (1) admet une solution

[†] Nous adoptons la notation nonlinéaire des résolvantes (cf. remarque 8 de la section 1).

maximum (cf. Proposition 3.1). Mais, nous semble-t-il, le plus intéréssant est de pouvoir développer dans ce cadre général, une technique de pénalisation, en utilisant, ce que nous appelons la projection de X sur U définie par $P_U f = \max\{u \in U; u \leqq f\}$ (cf. Théorème 3.5); le problème pénalisé de (1) s'écrit alors

$$Au_\varepsilon + (1/\varepsilon)(u_\varepsilon - P_U u_\varepsilon) \ni v. \tag{3}$$

Dans le cas $U = \{u \leqq \phi\}$, clairement $P_U f = \inf(f, \phi)$ et $u - P_U u = (u - \phi)^+$: (3) est alors la pénalisation classique pour le problème d'obstacle; mais comme nous le montrerons, cette méthode peut tout aussi bien s'appliquer a des problèmes "type I.Q.V." où $U = \{u \leqq Mu\}$, avec M application croissante (cf. Proposition 3.4), qu'à des problèmes "type Hamilton–Jacobi–Bellmann":

trouver le plus grand élément u de X tel que
u soit sous-solution de $A_i u = v_i$ pour tout i

où (A_i) est une famille d'opérateurs (cf. Corollaire 3.6).

Le plan de cet article est le suivant: dans la Section 1, nous introduisons les notions de sous-potentiels et donnons les proprietés de base, y compris l'inégalité de Kato; dans la Section 2, nous étudions les sous-potentiels dans divers cas particuliers, notament le cas linéaire et la cadre variationel; enfin dans la Section 3, nous étudions le problème (1).

Dans cet article nous avons développé uniquement des résultats abstraits: des applications aux problèmes de contrôle stochastique, ou au problème d'obstacle pour des équations quasi-linéaires du premier ordre pourront être trouvées dans [2], [3]; d'autres applications suivront. Enfin nous avons volontairement exclus de cet exposé l'étude de l'opérateur associé au problème (1) et l'utilisation de l'accrétivité qui donneront lieu à un deuxième article en cours de rédaction, ainsi que le lien entre les sous-solutions de $Au = v$ et celles du problème d'évolution $du/dt + Au = v$ qui donnera lieu à un troisième article en préparation.

1. Générateurs sous-potentiels

X désigne un espace vectoriel ordonné. Comme il est classique en analyse fonctionnelle non-linéaire, un opérateur de X est une multi-application $A : X \to \mathscr{P}(X)$ que l'on identifie avec son graphe $\{(u, v); u \in X, v \in Au\}$; le domaine effectif de A est $D(A) = \{u \in X; Au \neq \emptyset\}$, on dit que A est univoque si pour tout u dans $D(A)$, Au est réduit à un seul élément, que l'on désignera encore par Au: un opérateur univoque s'identifie donc à l'application $u \in D(A) \rightarrow Au \in X$.

Définition 1. On appelle *pré-générateur* de X tout opérateur A vérifiant: il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0[$

(i) pour tout $f \in X$, il existe une solution de

$$u \in X, \qquad u + \lambda A u \ni f; \tag{1}$$

(ii) étant donné u_1, u_2 solutions de (1) correspondant à $f_1, f_2 \in X$,

$$f_1 \leqq f_2 \Rightarrow u_1 \leqq u_2.$$

On dira que A est un *pré-générateur de type négatif ou nul* si (i) et (ii) sont vraies pour tout $\lambda > 0$.

Remarque 1. Etant donné A pré-générateur, $c > 0$ et ω réel, l'opérateur $cA + \omega I : u \rightarrow \{cv + \omega u;\ v \in Au\}$ est un pré-générateur: en effet, pour $\lambda > 0$ avec $\mu = 1 + \lambda\omega > 0$,

$$u + \lambda(cA + \omega I)u \ni f \Leftrightarrow u + (c\lambda/\mu)Au \ni f/\mu \tag{2}$$

et donc l'opérateur $cA + \omega I$ vérifie les propriétés (i) et (ii) de la définition 1 pour tout $\lambda > 0$ avec $\mu = 1 + \lambda\omega > 0$ et $c\lambda/\mu < \lambda_0$. En particulier si $\omega\lambda_0 \geqq c$, alors l'opérateur $cA + \omega I$ est un pré-générateur de type négatif ou nul.

Cette remarque justifie la définition suivante:

Définition 2. On appelle *type* d'un pré-générateur A de X,

$$\omega(A) = \inf\{\omega;\ A + \omega I \text{ est de type négatif ou nul}\}. \tag{3}$$

Etant donné A un pré-génératur de type ω, pour tout $\lambda > 0$ avec $\lambda\omega < 1$ et tout $f \in X$, il existe une unique solution de (1); on note $J_\lambda f$ cette solution; l'application J_λ est partout défine, croissante de X dans lui-même. Les applications J_λ s'appellent les *résolvantes* de A; comme on le vérifie classiquement, la famille $\{J_\lambda, \lambda > 0, \lambda\omega < 1\}$ vérifie l'*identité résolvante*:

$$\begin{gathered} J_\lambda f = J_\mu((\mu/\lambda)f + (1 - \mu/\lambda))J_\lambda f) \quad \forall f \in X, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \\ \text{avec } \lambda\omega < 1, \quad \mu\omega < 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Réciproquement, étant donné $\omega \geqq 0$ et $\{J_\lambda; \lambda > 0, \lambda\omega < 1\}$ une famille d'applications croissantes de X dans lui-même vérifiant l'identité résolvante (4), l'opérateur A défini par

(5) $$v \in Au \Leftrightarrow u = J_\lambda(u + \lambda v) \quad \text{pour tout } \lambda > 0 \text{ avec } \lambda\omega < 1$$

est l'unique pré-générateur dont les résolvantes sont J_λ pour $\lambda > 0$, $\lambda\omega < 1$; de plus $\omega(A) \leqq \omega$.

DÉFINITION 3. Soient A un pré-générateur de X de type ω et résolvante J_λ, et $u, v \in X$. On dit que *u est sous-potentiel de v (par rapport à A)*, que nous noterons, $Au \leqq v$, si

$$u \leqq J_\lambda(u + \lambda v) \quad \text{pour tout } \lambda > 0 \text{ avec } \lambda\omega < 1.$$

Les propriétés, très simples, suivantes sont essentielles:

PROPOSITION 1. *Soient A un pré-générateur de X de type ω et résolvantes J_λ, et $u, v \in X$. Alors*

(i) *Pour $\mu > \lambda > 0$ avec $\mu\omega < 1$,*

(6) $$u \leqq J_\lambda(u + \lambda v) \Rightarrow J_\lambda(u + \lambda v) \leqq J_\mu(u + \mu v).$$

(ii) *On a $Au \leqq v$ si et seulement si*

(7) *il existe une suite $\lambda_n \downarrow 0$ telle que $u \leqq J_{\lambda_n}(u + \lambda_n v)$ pour tout n.*

(iii) *Si $Au \leqq v$ alors*

(8) *l'application $\lambda \to J_\lambda(u + \lambda v)$ est croissante sur $\{\lambda > 0, \lambda\omega < 1\}$.*

PREUVE. Le point (i) résulte immédiatement de la croissance des résolvantes et de l'identité résolvante:

$$J_\lambda(u + \lambda v) = J_\mu\{u + \mu v + (1 - (\mu/\lambda))(J_\lambda(u + \lambda v) - u)\}.$$

Les points (ii) et (iii) résulte immédiatement de (i).

PROPOSITION 2. *Soient A un pré-générateur et $\{(u_i, v_i); i \in I\}$ une famille d'éléments de $X \times X$ telle que $Au_i \leqq v_i$ pour tout i. Si $u = \sup u_i$ existe dans X, alors $Au \leqq v$ pour tout majorant v de $\{v_i\}$ dans X.*

PREUVE. Etant donné $\lambda > 0$ avec $\lambda\omega < 1$, on a

$$u_i \leqq J_\lambda(u_i + \lambda v_i) \leqq J_\lambda(u + \lambda v) \quad \text{pour tout } i$$

et donc $u \leqq J_\lambda(u + \lambda v)$.

La propriété (8) nous amène tout naturellement a poser la

DÉFINITION 4. Soient A un pré-générateur de X et $u, v \in X$. On dit que *u est sous-potentiel régulier de v (par rapport à A)* si

$$u = \inf\{J_\lambda(u + \lambda v), \lambda > 0, \lambda\omega < 1\}.$$

REMARQUE 2. Soient A un pré-générateur de X et $u, v \in X$.

(i) Etant donné $c > 0$ et ω réel, utilisant la remarque 1 et la proposition 1, on a

$$Au \leqq v \Leftrightarrow (cA + \omega I)u \leqq cv + \omega u.$$

On en déduit en particulier que si $\omega(A) < 0$, alors

(9) $$Au \leqq v \Rightarrow u \leqq A^{-1}v$$

puisque $A^{-1}v = \boldsymbol{J}_\lambda(\lambda v)$, où $\boldsymbol{J}_\lambda$ est la résolvante de $\boldsymbol{A} = A + \omega(A)I$ et $\lambda = -\omega(A)^{-1}$.

(ii) Etant donné $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in X$, *l'opérateur translaté*

(10) $$\boldsymbol{A} : u \in X \to \{v - \boldsymbol{v};\, v \in A(u + \boldsymbol{u})\}$$

est encore un pré-générateur de même type que A; pour $\lambda > 0$ avec $\lambda\omega < 1$, la résolvante $\boldsymbol{J}_\lambda$ de $\boldsymbol{A}$ est définie par

$$\boldsymbol{J}_\lambda f = J_\lambda(\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v} + f) - \boldsymbol{u}$$

et donc

(11) $$Au \leqq v \Leftrightarrow \boldsymbol{A}(u - \boldsymbol{u}) \leqq v - \boldsymbol{v}.$$

REMARQUE 3. Etant donné A un pré-générateur et $\lambda > 0$ avec $\lambda\omega < 1$, on note A_λ l'appliction $(1/\lambda)(I - J_\lambda)$, appelé *approximation Yosida de A*. Comme on le vérifie classiquement pour tout u dans X, $A_\lambda u \in AJ_l u$. Maintenant pour $u, v \in X$, on a $Au \leqq v$ si et seulement si $A_\lambda(u + \lambda v) \leqq v$ pour tout $\lambda > 0$ avec $\lambda\omega < 1$.

REMARQUE 4. Soient A un pré-générateur de X et $u, v \in X$. On peut définir *u est sur-potentiel* (resp. *régulier*) *de v* (*par rapport à A*), qui sera noté $Au \geqq v$, par

$$u \geqq J_\lambda(u + \lambda v) \quad \text{pour tout } \lambda > 0 \text{ avec } \lambda\omega < 1$$
$$(\text{resp. } u = \sup\{J_\lambda(u + \lambda v);\, \lambda > 0, \lambda\omega < 1\}).$$

Il est clair d'après (5) que $v \in Au$ si et seulement si u est à la fois sous-potentiel (resp. régulier) et sur-potentiel (resp. régulier) de v par rapport a A. D'un autre coté, l'opérateur

$$(12) \qquad {}^{\#}A : u \in X \to \{v; -v \in A(-u)\}$$

est un pré-générateur de même type, dont les résolvantes ${}^{\#}J_\lambda$ sont définies par

$${}^{\#}J_\lambda f = -J_\lambda(-f)$$

de telle sorte que

$$(13) \qquad Au \geqq v \Leftrightarrow {}^{\#}A(-u) \leqq -v.$$

Pour cette raison, nous ne nous intéresserons qu'à l'étude des sous-potentiels.

Les définitions développées précédemment sont purement algébriques. Nous allons maintenant faire intervenir la "topologie de l'ordre". Comme il est classique, étant donné (u_n) une suite de X et $u \in X$, la notation $u_n \downarrow u$ exprime que la suite (u_n) est décroissante et $u = \inf u_n$.

DÉFINITION 5. (i) Une application $G : D(G) \to X$ sera dite *descendante* si pour toute suite (u_n) de $D(G)$ et $u \in X$,

$$u_n \downarrow u \Rightarrow u \in D(G) \quad \text{et} \quad Gu_n \downarrow Gu.$$

(ii) On appelle *générateur* (*de sous-potentiels*) de X, tout pré-générateur A de X vérifiant

(14) il existe $\lambda_n \downarrow 0$ tel que la résolvante J_{λ_n} soit descendante pour tout n.

Notons la

PROPOSITION 3. *Supposons que X vérifie*

(15) *toute suite décroissante minorée admet une borne inférieure.*

Soit A un pré-générateur de X de type ω. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) *A est un générateur*;
(b) *pour tout $\lambda > 0$ avec $\lambda\omega < 1$, la résolvante J_λ est descendante*;
(c) *la relation $Au \leqq v$ est fermée pour les limites décroissantes*:

$$u_n \downarrow u \quad et \quad v_n \downarrow v \quad et \quad Au_n \leqq v_n \qquad pour\ tout\ n \Rightarrow Au \leqq v.$$

PREUVE. L'implication (b)$\Rightarrow$(a) est triviale. L'impliction (a)$\Rightarrow$(c) résulte immédiatement de la proposition 1, en notant que pour $u_n \downarrow u$ et $v_n \downarrow v$ et $\lambda > 0$, on a $u_n + \lambda v_n \downarrow u + \lambda v$. Montrons (c)$\Rightarrow$(b): soient $\lambda > 0$ avec $\lambda\omega < 1$ et $f_n \downarrow f$. Puisque la suite $(u_n = J_\lambda f_n)$ décroit et est minorée par $J_\lambda f$, d'après (15),

$u = \inf u_n$ existe; aussi $J_\lambda f \leqq u$. Maintenant $Au_n \leqq (f_n - u)/\lambda$, puisque pour $0 < \mu < \lambda$,

$$J_\mu(u_n + (\mu/\lambda)(f_n - u)) \geqq J_\mu((\mu/\lambda)f_n + (1 - (\mu/\lambda))u_n) = u_n.$$

Utilisant (c), $Au \leqq (f - u)/\lambda$ et donc $u \leqq J_\lambda f$. En résumé $u_n \downarrow J_\lambda f$.

Remarque 5. On a implicitement utilisé ci-dessus la proprifé immédiate suivante: étant donné A un pré-générateur de X et $u, v \in X$,

$$\text{il existe } \nu \in Au \text{ tel que } \nu \leqq v \Rightarrow Au \leqq v.$$

La réciproque est évidemment fausse en général; cependant on rencontrera souvent la propriété:

$$(16) \qquad u \in D(A) \quad \text{et} \quad Au \leqq v \Leftrightarrow \text{il existe } \nu \in Au \text{ tel que } \nu \leqq v$$

comme nous le verrons dans la Section 2 sous des hypothèses particulières.

Remarque 6. Si A est un générateur, il en est de même de $cI + \omega A$ pour tout $c > 0$ et ω réel (cf. remarque 1) ainsi que de l'opérateur translaté A défini par (10) (cf. remarque 2); par contre, en général, l'opérateur ${}^{*}A$ défini par (12) n'est pas un générateur (de sous-potentiels): c'est en fait un "générateur de sur-potentiels" dont les résolvantes sont "montantes".

Achevons cette section par une extension dans ce cadre général et non-linéaire de *l'inégalité de Kato* (cf. [20], [1] pour une formulation abstraite dans la cas linéaire). Rappelons que l'espace vectoriel ordonné X est dit *réticulé* si pour tout u de X, $u^+ = \sup(u, 0)$ existe dans X; alors pour tout u, v de X, $u \vee v = \sup(u, v)$ et $u \wedge v = \inf(u, v)$ existe dans X: on a $u \vee v = (u - v)^+ + v$ et $u \wedge v = u - (u - v)^+$. Il est clair que l'application $u \to u^+$ est positivement homogène ($(\lambda u)^+ = \lambda u^+$ pour tout $\lambda > 0$) et sous-additive ($(u + v)^+ \leqq u^+ + v^+$), en particulier pour tout u, v dans X, l'application $\lambda \to (u + \lambda v)^+$ est convexe de $\mathbf{R}$ dans X et donc l'application $\lambda \to (1/\lambda)((u + \lambda v)^+ - v^+)$ est croissante sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. On définit pour tout u, v dans X:

$$(17) \qquad \sigma_\lambda^+(u, v) = (1/\lambda)(u + \lambda v)^+ - u^+) \quad \text{pour tout } \lambda > 0,$$

$$(18) \quad \sigma^+(u, v) = \inf\{\sigma_\lambda^+(u, v); \lambda > 0) \quad \text{si cette borne inféieure existe.}$$

Notons que lorsque X vérifie (15), alors $\sigma^+(u, v)$ existe pour tout u, v dans X.

On a la

PROPOSITION 4. *Supposons X réticulé et soient A un pré-générateur de X, u_i, v_i dans X tels que $Au_i \leqq v_i$ pour $i = 1, 2$.*

(i) *Pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$A(u_1 \vee u_2) \leqq \sigma_\lambda^+(u_1 - u_2, v_1) + \sigma_\lambda^+(u_2 - u_1, v_2); \tag{19}$$

(ii) *si X vérifie* (15) *et A est un générateur, alors*

$$A(u_1 \vee u_2) \leqq \sigma^+(u_1 - u_2, v_1) + \sigma^+(u_2 - u_1, v_2). \tag{20}$$

PREUVE. Le point (ii) résulte immédiatement du point (i). Pour démontrer (i), compte-tenu de la proposition 1, il suffit de montrer que pour $\mu > 0$ avec $\mu\omega < 1$ et $\mu \leqq (\lambda/2)$, on a

$$u_1 \vee u_2 \leqq J_\mu(u_1 \vee u_2 + \mu\{\sigma_\lambda^+(u_1 - u_2, v_1) + \sigma_\lambda^+(u_2 - u_1, v_2)\}).$$

Par hypothèse, $u_i \leqq J_\mu(u_i + \mu v_i)$ pour $i = 1, 2$; utilisant la définition de σ_λ^+ et la croissance de J_μ, il suffit donc de montrer que

$$\begin{aligned} u_1 + \mu v_1 \leqq{} & u_1 \vee u_2 \\ & + (\mu/\lambda)\{(u_1 - u_2 + \lambda v_1)^+ - (u_1 - u_2)^+ + (u_2 - u_1 + \lambda v_2)^+ - (u_2 - u_1)^+\} \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$u_1 - u_2 + \lambda v_1 \leqq (u_1 - u_2 + \lambda v_1)^+ + (u_2 - u_1 + \lambda v_2)^+ + ((\lambda/\mu) - 2)(u_2 - u_1)^+$$

qui est évidemment vérifié

REMARQUE 7. Compte-tenu de la remarque 2, sous les hypothèses de la proposition 4, on a pour tout v dans X

$$A(u_1 \vee u_2) \leqq \sigma_\lambda^+(u_1 - u_2, v_1 - v) + \sigma_\lambda^+(u_2 - u_1, v_2 - v) + v. \tag{21}$$

En particulier appliquant avec $v = \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2$ où $\alpha \in [0, 1]$, on obtient

$$\begin{aligned} A(u_1 \vee u_2) \leqq{} & (1 - \alpha)\sigma_{\lambda(1-\alpha)}^+(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \cdots \\ & + \alpha\sigma_{\lambda\alpha}^+(u_2 - u_1, v_2 - v_1) + \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2 \end{aligned} \tag{22}$$

avec la convention $0\sigma_0^+ = 0$.

REMARQUE 8. Nous achevons cette section sur quelque remarques concernant la terminologie que nous avons employée. D'abord nous avons adopté la terminologie nonlinéaire concernant les résolvantes (cf. par exemple [13], [8]): en effet en théorie linéaire, la résolvante est $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, on a donc $J_\lambda = R(1/\lambda, -A)/\lambda$. Le terme de sous-potentiel a été choisi de préférence à sous-solution pour d'une part faire référence à la théorie (élémentaire) du potentiel à laquelle cette notion nous semble ratachée, et d'autre part pour ne pas prêter à confusion avec d'autres notions de sous-solution (par exemple sous-solution au sens des distributions); suivant la terminologie de la théorie du potentiel classique, supposant que J_λ est la résolvante associée à un semi-groupe sous-markovien (c'est à dire $J_\lambda = \lambda^{-1} V_{1/\lambda}$, où V_p est la transformée de Laplace), u est sous-potentiel (resp. régulier) de 0 si $-u$ est (V_p)- surmédiane (resp. excessive) (cf. [19]). La terminologie d'application descendante a été empruntée à [16].

2. Quelques cas particuliers

Dans cette section, nous caractérisons les sous-potentiels et sous-potentiels réguliers, dans quelques cas particuliers. X designe un espace vectoriel ordonné de cône positif X_+.

A. Hypothèses de continuité

On suppose X muni d'une structure d'espace vectoriel topologique compatible avec l'ordre, c'est à dire telle que X_+ soit fermé dans X. Notons d'abord la

PROPOSITION 1. *Soit A un pré-générateur de X vérifiant*

$$\text{(1)} \qquad \textit{pour tout } u, v, w \textit{ dans } X, \quad J_\lambda(u+\lambda v) - J_\lambda(u+\lambda w) \to 0 \quad \textit{dans } X \textit{ lorsque } \lambda \to 0.$$

(i) *Etant donné u, v, w dans X, si u est sous-potentiel régulier de v et $Au \leqq w$, alors u est sous-potentiel régulier de w.*

(ii) *Si de plus A est univoque et continu sur $D(A)$, alors pour (u, v) dans $D(A) \times X$, $Au \leqq v$ si et seulement si $Au \leqq v$.*

PREUVE. Pour le point (i), donnons-nous $\boldsymbol{u}$ dans X tel que $\boldsymbol{u} \leqq J_\lambda(u+\lambda w)$ pour tout $\lambda > 0$ avex $\lambda\omega < 1$. On a alors, en utilisant $Au \leqq v$,

$$\boldsymbol{u} \leqq J_\lambda(u+\lambda w) - J_\lambda(u+\lambda v) + J_\mu(u+\mu v) \quad \text{pour } \mu > \lambda > 0 \text{ avec } \mu\omega < 1$$

d'où en passant d'abord à la limite $\lambda \to 0$, grâce à (1)

$$\boldsymbol{u} \leqq \inf\{J_\mu(u+\mu v); \mu > 0, \mu\omega < 1\} = u.$$

Pour le point (ii), notons d'abord que la propriété (1) implique

(2) pour tout $u \in D(A)$ et $v \in X$, $J_\lambda(u+\lambda v) \to u$ dans X lorsque $\lambda \to 0$.

En effet, si $w \in Au$, alors $J_\lambda(u+\lambda v) - u = J_\lambda(u+\lambda v) - J_\lambda(u+\lambda w)$. Maintenant si A est univoque et continu sur $D(A)$, on a donc

$$A_\lambda(u+\lambda v) = AJ_\lambda(u+\lambda v) \to Au \quad \text{dans } X \text{ lorsque } \lambda \to 0.$$

On achève grâce à la remarque 1.3.

Démontrons maintenant la

PROPOSITION 2. *Soit A un générateur de X vérifiant* (2). *On pose*

$$D_{\mathrm{cl}}(A) = \{u \in X;\ \textit{pour tout } v \in X,\ J_\lambda(u+\lambda v) \to u \textit{ dans } X \textit{ lorsque } \lambda \to 0\}.$$

Etant donnés u, v dans X les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) *u est sous-potentiel régulier de v,*

(b) *il existe une suite (u_n, v_n) dans le graphe de A telle que $u_n \downarrow u$ et $v_n \leqq v$,*

(c) *$Au \leqq v$ et il existe une suite (u_n) dans $D_{\mathrm{cl}}(A)$ telle que $u_n \downarrow u$.*

PREUVE. L'implication (a)$\Rightarrow$(b) est immédiate (cf. remarque 1.3); l'implication (b)$\Rightarrow$(c) résulte du fait que A est un générateur et de l'hypothèse (2). Maintenant supposons (c) et donnons-nous $\boldsymbol{u}$ dans X tel que $\boldsymbol{u} \leqq J_\lambda(u+\lambda v)$ pour tout $\lambda > 0$ avec $\lambda\omega < 1$. Utilisant $u_n \in D_{\mathrm{cl}}(A)$, puisque $\boldsymbol{u} \leqq J_\lambda(u_n + \lambda v)$, à la limite lorsque $\lambda \to 0$ on a $\boldsymbol{u} \leqq u_n$; ceci étant vrai pour tout n, on obtient $\boldsymbol{u} \leqq u$.

REMARQUE 1. La partie $D_{\mathrm{cl}}(A)$ est évidemment contenu dans $\mathrm{cl}(D(A))$, adhérence de $D(A)$ dans X. La propriété (1) (et donc (2)) est évidemment impliquée par la locale uniforme équicontinuité des résolvantes, ou plus généralement par la propriété

(3) pour tout $u \in X$, $J_\lambda f - J_\lambda g \to 0$ lorsque $(\lambda, f, g) \to (0, u, u)$.

Par un raisonnement topologique élémentaire, la propriété (3) implique que $D_{\mathrm{cl}}(A) = \mathrm{cl}(D(A))$.

REMARQUE 2. Si X vérifie

(4) pour toute suite décroissante (u_n) de X_+, $u_n \downarrow 0 \Leftrightarrow u_n \to 0$ dans X

alors tout pré-générateur à résolvantes séquentiellement continues est un générateur. De plus si u est sous-potentiel régulier, alors $u \in \mathrm{cl}(D(A))$; sous l'hypothèse (3), on a donc: u est sous-potentiel régulier de v si et seulement si $u \in \mathrm{cl}(D(A))$ et $Au \leqq v$.

B. Cas linéaire

Un opérateur A est dit linéaire, si A est univoque, $D(A)$ est un sous-espace vectoriel et l'appliction $u \in D(A) \rightarrow Au \in X$ est linéaire. Si un pré-générateur est linéaire, ses résolvantes sont évidemment des applications linéaires positives de X dans lui-même; on a en fait cette propriété plus généralement pour un pré-générateur dont le graphe est un sous-espace vectoriel de $X \times X$: un tel opérateur sera appelé un *pré-générateur à résolvantes linéaires*; sa donnée est équivalente a celle d'une famille $(J_\lambda; \lambda > 0, \lambda\omega < 1\}$ d'applications linéaires positives de X dans lui-même verifiant l'identité résolvante (1.4). Il est clair que pour un tel opérateur A, $\{(u, v); Au \leqq v\}$ est un cône convexe de $X \times X$; de plus si $\mathbf{v} \in A\mathbf{u}$, alors pour $u \in X$,

$$Au \leqq v \Leftrightarrow A(u - \mathbf{u}) \leqq v - \mathbf{v}.$$

On suppose maintenant que

$$X = X_+ - X_+. \tag{5}$$

On note X^* l'espace de toutes les formes linéaires sur X; sous l'hypothèse (5), X^* est ordonné naturellement par le cône des formes linéaires positives sur X et vérifie (1.15). Etant donné A un pré-générateur de type ω, à résolvantes linéaires, on peut considérer *l'opérateur transposé* A^* de X^* défini par

$$v^* \in A^*u^* \Leftrightarrow \langle v^*, u \rangle = \langle u^*, v \rangle \quad \text{pour tout } u, v \in X \text{ avec } v \in Au. \tag{6}$$

On vérifie immédiatement que A^* est un générateur de X^* de type $\omega(A^*) \leqq \omega$ et dont les résolvantes sont pour $\lambda > 0$ avec $\lambda\omega < 1$ les transposées J_λ^* des J_λ. Il est clair aussi que

$$A^*u^* = A^*u^* + D(A)^\perp \quad \text{pour tout } u^* \in X^* \tag{7}$$

où pour une partie D de X

$$D^\perp = \{v^* \in X^*; \langle v^*, u \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in D\}.$$

On se donne maintenant Y un sous-espace vectoriel de X^* vérifiant

$$u \in X_+ \Leftrightarrow u \in X \quad \text{et} \quad \langle u^*, u \rangle \geqq 0 \text{ pour tout } u^* \in Y_+. \tag{8}$$

Il est clair que la topologie $\sigma(X, Y)$ sur X est compatible avec l'ordre. Etant donné $u, v \in X$, d'après (8) on a $Au \leqq v$ si et seulement si

$$\langle w^*, u \rangle \leqq \langle w^*, J_\lambda(u + \lambda v)\rangle = \langle J_\lambda^* w^*, u + \lambda v \rangle$$
$$\text{pour tout } w^* \in Y_+, \quad \lambda > 0, \quad \lambda\omega < 1$$

ou encore, en posant $u^* = J_\lambda^* w^*$, $v^* = (1/\lambda)(w^* - u^*) \in A^* u^*$ et compte-tenu de (7), si et seulement si

$$\langle v^*, u \rangle \leqq \langle u^*, v \rangle \tag{9}$$
$$\text{pout tout } u^* \in \{J_\lambda^* w^*,\ w^* \in Y_+, \lambda > 0, \lambda\omega < 1\} \quad \text{et} \quad v^* \in A^* u^*.$$

On va préciser cette caractérisation en supposant

$$J_\lambda u \to u \quad \text{dans } \sigma(X, Y) \quad \text{lorsque } \lambda \to 0 \quad \text{pour tout } u \in X, \tag{10}$$

$$J_\lambda^*(Y_+) \subset Y \quad \text{pour tout } \lambda > 0 \text{ avec } \lambda\omega < 1. \tag{11}$$

Notons que l'hypothèse (10) implique la linéarité de A, puisque pour $v \in A0$, on a $J_\lambda v = 0$. On a la

Proposition 3. *Soit A un pré-générateur linéaire de X vérifiant* (10) *et* (11). *Etant donné $u, v \in X$ les assertions suivantes sont équivalentes*:

(a) $Au \leqq v$,

(b) *u est un sous-potentiel régulier de v,*

(c) $\langle v^*, u \rangle \leqq \langle u^*, v \rangle$ *pour tout $u^* \in Y_+$ et $v^* \in A^* u^* \cap Y$.*

De plus si $u \in D(A)$, elles sont encore équivalentes à $Au \leqq v$.

Preuve. D'après (10), il est clair que (a)$\Leftrightarrow$(b), puisque

$$J_\lambda(u + \lambda v) = J_\lambda u + \lambda J_\lambda v \to u \quad \text{dans } \sigma(X, Y) \quad \text{lorsque } \lambda \to 0.$$

Rappelons maintenant que (a)$\Leftrightarrow$(9). Etant donné $w^* \in Y_+$, on a en utilisant (11) et la positivité de J_λ^*, $u^* = J_\lambda^* w^* \in Y_+$ et $v^* = A_\lambda^* w^* \in A^* u^* \cap Y$ de telle sorte que (c)$\Rightarrow$(a). Maintenant pour $u^* \in Y_+$ et $v^* \in A^* u^* \cap Y$ on a $J_\lambda^* v^* = A_\lambda^* u^* \in A^* J_\lambda^* u^*$ et donc utilisant (9)

$$\langle v^*, J_\lambda u \rangle \leqq \langle u^*, J_\lambda v \rangle.$$

Faisant $\lambda \to 0$, grâce à (10), on obtient (a)$\Rightarrow$(c). Enfin si $u \in D(A)$, alors $A_\lambda(u + \lambda v) = J_\lambda A u + v - J_\lambda v \to Au$ dans $\sigma(X, Y)$ lorsque $\lambda \to 0$; on conclut grâce à la remarque 1.3.

Remarque 3. Supposons X muni d'une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe compatible avec l'ordre et A pré-générateur à résolvantes linéaires et continues.

(i) Pour tout sous-espace Y du dual topologique X' de X contenant le cône des formes linéaires continues positives sur X, d'après le théorème de Hahn–Banach, la propriété (8) est vérifiée; il et clair que la propriété (11) est aussi satisfaite. Maintenant considérons Y l'espace des $u^* \in X^*$ "séquentiellement continues pour l'ordre", c'est à dire vérifiant:

$$\begin{gathered}\text{pour toute suite } (u_n) \text{ de } X, \text{ s'il existe } w_n \downarrow 0 \text{ et } w_n \downarrow 0 \\ \text{avec } -w_n \leqq u_n \leqq w_n \text{ pour tout } n, \text{ alors } \langle u^*, u_n \rangle \to 0\end{gathered}$$

et supposons que Y vérifie (8); alors, si A est un générateur, il est clair que (11) est satisfaite.

(ii) Supposons que Y soit un sous-espace de X' (vérifiant (8)). Comme nous l'avons noté dans la remarque 1, la propriété (10) est impliquée par la densité de $D(A)$ dans X et l'équicontinuité dans X des résolvantes J_λ lorsque $\lambda \to 0$ (qui est équivalent à (3)). Lorsque X est un espace de Banach et $Y = X'$, d'après le théorème de Banach–Steinhauss, la propriété (10) est en fait équivalente à la densité de $D(A)$ dans X et l'équicontinuité des résolvantes lorsque $\lambda \to 0$.

Remarque 4. Si en plus de (8) et (11), on suppose que $Y = Y_+ - Y_+$, alors la restriction B de A^* à Y est un pré-générateur de Y et on peut permuter les roles de (X, A) et (Y, B).

Supposons maintenant l'espace X réticulé (donc vérifie (5)) et $Y = Y_+ - Y_+$ (et vérifie (8)). On peut considérer X comme un sous-espace vectoriel ordonné du dual Y^* de Y. Etant donné u, v dans X, $\sigma_\lambda^+(u, v)$ défini par (1.17) converge dans Y^* lorsque $\lambda \to 0$; on notera $\sigma^+(u, v)$ sa limite.† On a alors l'énoncé suivant de l'inégalité de Kato:

Proposition 4. *Supposant X réticulé et Y vérifie* (5), *soient A un pré-générateur linéaire de X vérifiant* (10) *et* (11), *et u, v dans X.*

(i) *Si $Au \leqq v$, alors*

$$\langle v^*, u^+ \rangle \leqq \langle \sigma^+(u, v), u^* \rangle \quad \textit{pour tout } u^* \in Y_+ \quad \textit{et} \quad v^* \in A^* u^* \cap Y. \tag{12}$$

(ii) *Si $v \in Au$, alors*

$$\begin{gathered}\langle u^*, |u| \rangle \leqq \langle \sigma^+(u, v) + \sigma^+(-u, -v), u^* \rangle \\ \textit{pour tout } u^* \in Y_+ \quad \textit{et} \quad v^* \in A^* u^* \cap Y.\end{gathered} \tag{13}$$

Preuve. Si $Au \leqq v$, appliquant la proposition 1.4 avec $u_1 = u$, $v_1 = v$, $u_2 = v_2 = 0$, on a $Au^+ \leqq \sigma_\lambda^+(u, v)$ pour tout $\lambda > 0$; utilisant alors la proposition 3 et passant à la limite lorsque $\lambda \to 0$, on obtient (12). Si $v \in Au$, on raisonne de

† Cette notation est cohérente avec (1.18) en se plaçant dans l'espace Y^*.

la même manière en notant qu'alors $Au \leqq v$ et $A(-u) \leqq (-v)$ et rappelant que $|u| = u \vee (-u)$.

C. Cas accrétif

Etant donné une application convexe N de X dans $[0, \infty[$, on posera pour tout u, v dans X

$$(14) \qquad \begin{aligned} N(u, v) &= \inf\{(1/\lambda)(N(u + \lambda v) - N(u)); \lambda > 0\} \\ &= \lim(1/\lambda)(N(u + \lambda v) - N(u)) \quad \text{lorsque } \lambda \to 0+. \end{aligned}$$

Un opérateur A de X est dit *N-accrétif* (ou *accrétif pour N*) si

$$(15) \qquad \begin{aligned} &N(u_1 - u_2) \leqq N(u_1 - u_2 + \lambda(v_1 - v_2)) \\ &\text{pour tout } v_1 \in Au_1, \quad v_2 \in Au_2 \quad \text{et} \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

ou ce qui est équivalent si

$$(16) \qquad N(u_1 - u_2, v_1 - v_2) \geqq 0 \quad \text{pour tout } v_1 \in Au_1, \quad v_2 \in Au_2.$$

Notons d'abord la

PROPOSITION 5. *Soit N une application convexe N de X dans* $[0, \infty[$ *vérifiant*

$$(17) \qquad N \textit{ est croissante et } X_+ = \{u \in X; N(-u) = 0\}.$$

Soit d'autre part A un opérateur N-accrétif de X. Alors

(i) *A est un pré-générateur si et seulement si il existe* $\lambda_0 > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \in]0, \lambda_0[$ *et* $f \in X$, *il existe une solution de* $u \in X$, $u + \lambda Au \ni f$. *De plus alors* $\omega(A) \leqq 1/\lambda_0$.

(ii) *Supposant que A est un pré-générateur, étant donné u, v dans X, on a* $Au \leqq v$ *si et seulement si*

$$(18) \qquad N(u - \boldsymbol{u}, v - \boldsymbol{v}) \geqq 0 \quad \textit{pour tout } \boldsymbol{v} \in A\boldsymbol{u}.$$

PREUVE. Utilisant la définition d'un pré-générateur, (15) définissant la N-accrétivité et la deuxième partie de (17), le point (i) est clair. Supposant maintenant que A soit un pré-générateur, (15) peut encore s'écrire

$$(19) \qquad \begin{aligned} &N(J_\lambda u_1 - J_\lambda u_2) \leqq N(u_1 - u_2) \\ &\text{pour tout } u_1, u_2 \text{ dans } X \text{ et } \lambda > 0 \text{ avec } \lambda\omega < 1 \end{aligned}$$

et (18) est équivalent à

(20) $N(u - J_\lambda \boldsymbol{u}) \leqq N(u + \lambda v - \boldsymbol{u})$ pour tout $\boldsymbol{u}$ dans X et $\lambda > 0$ avec $\lambda\omega < 1$.

Supposant (20) et appliquant avec $\boldsymbol{u} = u + \lambda v$, on obtient $u \leqq J_\lambda(u + \lambda v)$. Réciproquement supposons $Au \leqq v$; utilisant (19) et la croissance de N, on obtient

$$N(u - J_\lambda \boldsymbol{u}) \leqq N(J_\lambda(u + \lambda v) - J_\lambda \boldsymbol{u}) \leqq N(u + \lambda v - \boldsymbol{u}),$$

c'est à dire (20).

On suppose maintenant que X est un espace de Banach de norme $\| \cdot \|$, avec X_+ fermé dans X. Un opérateur A de X est dit *accrétif* si il est accrétif pour $N(u) = \| u \|$, c'est à dire si

$$[u_1 - u_2, v_1 - v_2] \geqq 0 \quad \text{pour tout } v_1 \in Au_1, \quad v_2 \in Au_2$$

où $[u, v] = N(u, v)$ correspondant à $N(u) = \| u \|$,

$$[u, v] = \lim(1/\lambda)(\| u + \lambda v \| - \| u \|) \quad \text{lorsque } \lambda \to 0+.$$

On peut dire encore qu'un opérateur A est accrétif si pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $J_\lambda = (1 + \lambda A)^{-1}$ est une application contractante[†] de $D(J_\lambda) = R(I + \lambda A) = \{u + \lambda v; v \in Au\}$ dans X. On dit que A est *m-accrétif* si A est accrétif et pour tout $\lambda > 0$, $D(J_\lambda) = R(I + \lambda A) = X$; notons d'ailleurs que si A est accrétif et s'il existe $\lambda > 0$ tel que $R(I + \lambda A) = X$, alors pour tout $\lambda > 0$, $R(I + \lambda A) = X$.

Introduisons la fonctionnelle

(21) $$N_+(u) = \operatorname{dist}(-u, X_+) = \inf\{\| u + v \|; v \in X_+\}.$$

Il est clair que N_+ est sous-linéaire continue sur X et vérifie (17). On a la

PROPOSITION 6. *Soit A un opérateur de X. Alors A est un pré-générateur accrétif si et seulement si A est m-accrétif et N_+-accrétif. De plus alors $\omega(A) \leqq \inf\{\omega; A + \omega I$ est accrétif$\}$.*

PREUVE. D'après la proposition 5(i), la condition suffisante est immédiate; de plus alors $\omega(A) \leqq 0$. Supposons maintenant que A soit un pré-générateur accrétif; il est clair, comme nous l'avons rappelé ci-dessus que A est m-accrétif; montrons que A est N_+-accrétif. Pour cela il suffit pour u_1, u_2 dans X et $\lambda > 0$ avec $\lambda\omega(A) < 1$ de montrer

[†] C'est à dire lipschitzienne de rapport inférieure ou egal à 1.

$$(22)\qquad N_+(J_\lambda u_1 - J_\lambda u_2) \leqq N_+(u_1 - u_2).$$

Etant donné $v \in X_+$, on a $J_\lambda(u_1 + v) - J_\lambda u_1 \geqq 0$ et donc, en utilisant la définition de $N_+(u)$ et la contractivité de J_λ

$$N_+(J_\lambda u_1 - J_\lambda u_2) \leqq \| J_\lambda(u_1 + v) - J_\lambda u_2 \| \leqq \| u_1 - u_2 + v \|.$$

Prenant la borne inférieure en v, on obtient (22). Enfin etant donné ω tel que $A + \omega I$ soit accrétif, puisque $A + \omega I$ est un pré-générateur, il est de type négatif ou nul et donc $\omega(A) \leqq \omega$.

Remarque 5. Supposons que X soit réticulé; alors $N_+(u) \leqq \| u^+ \|$. Si de plus X vérifie

$$(23)\qquad u, v \in X, \quad 0 \leqq u \leqq v^+ \Rightarrow \| u \| \leqq \| v \|$$

alors $N_+(u) = \| u^+ \|$. Comme il est classique, on posera $[u, v]_+ = N_+(u, v)$, c'est à dire

$$(24)\qquad [u, v]_+ = \lim(1/\lambda)(\|(u + \lambda v)^+\| - \|u^+\|) \quad \text{lorsque } \lambda \to 0_+$$

et on dira qu'un opérateur A de X est *T-accrétif* si A est N_+-accrétif, c'est à dire si

$$(25)\qquad [u_1 - u_2, v_1 - v_2]_+ \geqq 0 \quad \text{pour tout } v_1 \in Au_1, \quad v_2 \in A_2.$$

Notons qu'en général un opérateur T-accrétif n'est pas nécessairement accrétif (cf. [15]) bien que ce soit le cas si X vérifie

$$(26)\quad u, v \in X, \quad \| u^+ \| \leqq \| v^+ \| \text{ et } \| u^- \| \leqq \| v^- \| \Rightarrow \| u \| \leqq \| v \|.$$

Notons d'ailleurs que l'on peut toujours renormer X par une norme équivalente coincidant avec la norme de X sur X_+ (de telle sorte que la notion de T-accrétivité est inchangée) et telle que (26) (et (23)) soient vérifiées. Comme corollaire des propositions 5 et 6, sous les hypothéses (23) et (26) un opérateur A de X est un pré-générateur accrétif si et seulement si A est T-accrétif et il existe $\lambda > 0$ tel que $R(I + \lambda A) = X$. De plus alors, étant donné u, v dans X, on a $Au \leqq v$ si et seulement si

$$[u - \boldsymbol{u}, v - \boldsymbol{v}]_+ \geqq 0 \quad \text{pour tout } \boldsymbol{v} \in A\boldsymbol{u}.$$

D. Cadre variationnelle

Dans ce cadre X est un espace de Hilbert réticulé de norme $\| \cdot \|$ et de produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ vérifiant

(27) $(u^+, u^-) = 0$ pour tout $u \in X$ et $(u, v) \geqq 0$ pour tout $u, v \in X_+$.[†]

Il est classique (cf. [12]) qu'alors X vérifie (1.15) et (4).

On considère d'autre part V un sous-espace vectoriel dense de X muni d'une structure d'espace de Banach réflexif, de norme $\|\cdot\|_v \leqq \|\cdot\|$, de tel sorte que X s'injecte continuement dans le dual V' de V. On suppose de plus

(28) $$u \in V \Rightarrow u^+ \in V.$$

On se donne Φ une application de V dans $[0, \infty]$ convexe semi-continue inférieurement avec $\Phi(0) = 0$ et $\mathscr{A}$ une application de V dans V' que l'on suppose monotone et hémicontinue, c'est à dire vérifiant

(29) $$\langle \mathscr{A}u_1 - \mathscr{A}u_2, u_1 - u_2 \rangle \geqq 0 \quad \text{pour tout } u_1, u_2 \text{ dans } V,$$

(30) $$\langle \mathscr{A}(u + tv), w \rangle \to \langle \mathscr{A}u, w \rangle \quad \text{lorsque } t \to 0 \quad \text{pour tout } u, v, w \in V.$$

On suppose de plus

(31) $$\begin{aligned} &\Phi(u_1) + \Phi(u_2) + \langle \mathscr{A}u_1 - \mathscr{A}u_2, (u_1 - u_2)^+ \rangle \\ &\geqq \Phi(u_1 \vee u_2) + \Phi(u_1 \wedge u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in V \end{aligned}$$

et l'hypothèse d'"ellipticité"

(32) $$\begin{gathered} \text{pour tout } u_0 \in D(\Phi) = \{u \in V; \Phi(u) < \infty\}, \text{ il existe } \lambda_0 \text{ tel que} \\ (\Phi(u) + \langle \mathscr{A}u, u - u_0 \rangle + \lambda_0 \| u \|^2) / \| u \|_v \to \infty \quad \text{lorsque } \| u \|_v \to \infty. \end{gathered}$$

On note A la restriction à X de l'opérateur $\mathscr{A} + \partial\Phi$ où $\partial\Phi$ est le sous-différentiel de Φ; en d'autres termes A est défini par

(33) $$\begin{gathered} v \in Au \Leftrightarrow u \in V, v \in X \text{ et } \Phi(u) \leqq \langle v - \mathscr{A}u, u - \boldsymbol{u} \rangle + \Phi(\boldsymbol{u}) \\ \text{pour tout } \boldsymbol{u} \in V. \end{gathered}$$

On a alors la

Proposition 7. *Sous les hypothèses et notations ci-dessus:*

(i) *A est un générateur monotone de X.*

(ii) *Etant donné u, v dans X tel qu'il existe $w \in D(\Phi)$ avec $w \leqq u$, on a $Au \leqq v$ si et seulement si $u \in D(\Phi)$ et*

(34) $$\Phi(u) \leqq \langle v - \mathscr{A}u, (u - \boldsymbol{u})^+ \rangle + \Phi(u \wedge \boldsymbol{u}) \quad \textit{pour tout } \boldsymbol{u} \in V.$$

[†] Cette hypothèse est équivalente à (23) et $\| u \| = \| \, |u| \, \|$.

De plus alors u est sous-potentiel régulier de v.

PREUVE. Utilisant l'hypothèse (31), il est clair que A est T-monotone, c'est à dire vérifie

(35) $$(v_1 - v_2, (u_1 - u_2)^+) \geqq 0 \quad \text{pour tout } v_1 \in Au_1, \quad v_2 \in Au_2.$$

Remarquant que d'après (27)

(36) $$2\lambda(v, u^+) \leqq \|(u + \lambda v)^+\|^2 - \|u^+\|^2$$

on en déduit que A est T-accrétif. Maintenant sous l'hypopthèse (32), pour λ suffisament grand, l'opérateur $\mathscr{A} + \partial\Phi + \lambda I$ est d'image V' tout entier (cf. [14]) et donc $R(I + \lambda A) = X$. On en déduit que A est un pré-générateur. Comme X vérifie (4) le point (i) est ainsi démontré.

Donnons-nous maintenant u, v dans X et supposons d'abord $u \in D(\Phi)$ et (34) est vérifiée; utilisant (31), on a alors

(37) $$\Phi(\boldsymbol{u}) + \langle v - \mathscr{A}\boldsymbol{u}, (u - \boldsymbol{u})^+\rangle \geqq \Phi(u \vee \boldsymbol{u}) \quad \text{pour tout } \boldsymbol{u} \in V.$$

Etant donné $\boldsymbol{v} \in A\boldsymbol{u}$, appliquant (33), en remplaçant u par $\boldsymbol{u}$, v par $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{u}$ par $u \vee \boldsymbol{u}$, on a

$$\Phi(\boldsymbol{u}) + \langle \boldsymbol{v} - \mathscr{A}\boldsymbol{u}, (u - \boldsymbol{u})^+ \leqq \Phi(u \vee \boldsymbol{u}),$$

d'où en retranchant les deux inégalités précédentes $(v - \boldsymbol{v}, (u - \boldsymbol{u})^+) \geqq 0$; appliquant avec $\boldsymbol{u} = J_\lambda(u + \lambda v)$, $\boldsymbol{v} = v + (u - \boldsymbol{u})/\lambda$, on obtient $\|(u - \boldsymbol{u})^+\| \leqq 0$ et donc u est un sous-potentiel de v.

Supposons maintenant qu'il existe w dans $D(\Phi)$ tel que $w \leqq u$ et que $Au \leqq v$. Posons $u_\lambda = J_\lambda(u + \lambda v)$. Appliquant (33), en remplaçant u par u_λ, v par $v + (u - u_\lambda)/\lambda$ et $\boldsymbol{u}$ par w, on obtient

(38) $$\Phi(u_\lambda) + (1/\lambda)(u - u_\lambda, w - u_\lambda) \leqq \langle v - \mathscr{A}u_\lambda, u_\lambda - w\rangle + \Phi(w)$$

d'où utilisant la monotonie de $\mathscr{A}$ et $\Phi \geqq 0$

(39) $$(u - u_\lambda, w - u_\lambda) \leqq \lambda\{\langle v - \mathscr{A}w, u_\lambda - w\rangle + \Phi(w)\}.$$

Maintenant par définition (u_λ) décroit lorsque λ décroit et est minoré par u. Comme X vérifie (1; 15) et (4) on en déduit que (u_λ) converge dans X lorsque $\lambda \to 0$; notant $\boldsymbol{u}$ sa limite, on a d'après (39), $(u - \boldsymbol{u}, w - \boldsymbol{u}) \leqq 0$, et donc, grâce à (27), $\|u - \boldsymbol{u}\|^2 \leqq (u - \boldsymbol{u}, u - w) \leqq 0$. En d'autres termes, $u_\lambda \to u$ dans X lorsque $\lambda \to 0$.

Aussi grâce à (27), on a $(u - u_\lambda, w - u_\lambda) \geqq 0$ et donc par (38)

$$\Phi(u_\lambda) \leqq \langle v - \mathscr{A}u_\lambda, u_\lambda - w\rangle + \Phi(w) \leqq \langle v - \mathscr{A}w, u_\lambda - w\rangle + \Phi(w).$$

Utilisant (32) on en déduit que (u_λ) est donc borné dans V lorsque $\lambda \to 0$ et donc $u_\lambda \to u$ dans $\sigma(V, V')$ lorsque $\lambda \to 0$, $u \in D(\Phi)$ et

$$\Phi(u) \leqq \langle v - \mathscr{A}w, u - w\rangle + \Phi(w). \tag{40}$$

L'inégalité (40) est vraie pour tout w dans V tel que $w \leqq u$. Pour $0 < t \leqq 1$, appliquons (40) avec $w = (1-t)u + t(u \wedge \boldsymbol{u})$, utilisant la convexité et divisant par t, on obtient

$$\Phi(u) \leqq \langle v - \mathscr{A}(u - t(u - \boldsymbol{u})^+), (u - \boldsymbol{u})^+\rangle + \Phi(u \wedge \boldsymbol{u}).$$

Passant à la limite lorsque $t \to 0$, grâce à (30), on obtient (34).

3. Problème de controle

Dans cette section X est un espace vectoriel ordonné et nous nous donnons $(A_i)_{i\in I}$ une famille de pré-générateurs de X, $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de X indéxée par le même ensemble I, et U une partie de X. Nous poserons

$$\mathscr{V} = \{u \in U; A_i u \leqq v_i \text{ pour tout } i \in I\} \tag{1}$$

et considérons le problème d'existence et d'approximation de max $\mathscr{V}$, élément maximum de l'ensemble $\mathscr{V}$.

Notons tout d'abord le résultat immédiat suivant

PROPOSITION 1. *Supposons que U vérifie*

(2) *toute partie non vide de U majorée dans X admet une borne supérieure dans X appartenant à U.*

Alors max $\mathscr{V}$ *existe si et seulement si $\mathscr{V}$ est non vide et majorée dans X.*

PREUVE. La condition nécessaire est triviale. Maintenant d'après (2) et la proposition 1.2, si $\mathscr{V}$ est non vide et majorée dans X, sup $\mathscr{V}$ existe et appartient à $\mathscr{V}$.

REMARQUE 1. (i) L'ensemble $\mathscr{V}$ est majoré en particulier si U est lui-même majoré ou si inf $\omega(A_i) < 0$; en effet dans ce dernier cas, considérant i_0 tel que $\omega = \omega(A_{i_0}) < 0$, $w = A_{i_0}^{-1}v_{i_0}$ est un majorant de $\mathscr{V}$ (cf. remarque 1.2(i)).

(ii) L'ensemble $\mathscr{V}$ est non vide en particulier dans le "cas positif", c'est à dire: $0 \in U$, $A_i 0 \leqq 0$ et $v_i \geqq 0$ pour tout i.

Bien qu'il fornisse des théorèmes d'existence de solutions maxima pour des problèmes de controle dans des espaces complets (pour l'ordre), le résultat de la proposition 1 n'est pas très satisfaisant: la propriété (2) est très restrictive, et il ne fournit aucune méthode d'approximation de l'élément maximum.

Nous allons maintenant considérer le cas où X est séquentiellement complet et les opérateurs A_i sont des générateurs de type $\omega(A_i)$ majorée. Plus precisément pour englober un cadre un peu plus général, nous allons nous donner de plus maintenant un cône convexe $\mathcal{S}$ de X et supposer qu'il existe $\lambda_k \downarrow 0$ telle que pour tout entier k et tout $i \in I$ les propriétés suivantes soient vérifiées

$$v_i \in \mathcal{S}, \quad \lambda_k \omega(A_i) < 1 \quad \text{et} \quad J^i_{\lambda_k}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}, \tag{3}$$

$$\text{pour toute suite } (f_n) \text{ de } \mathcal{S} \text{ et } f \text{ dans } \mathcal{S}, \quad f_n \downarrow f \Rightarrow J^i_{\lambda_k} f_n \downarrow J^i_{\lambda_k} f, \tag{4}$$

où J^i_λ désigne la résolvante de A_i.

Montrons d'abord le résultat suivant:

Proposition 2. *En plus des hypothèses* (3) *et* (4) *nous supposerons*

(a) *Il existe une application M de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ descendante telle que $U = \{u \in \mathcal{S}; u \leqq Mu\}$,*

(b) *soit I est dénombrable et $\mathcal{S}$ vérifie*

$$\begin{array}{c}\textit{toute suite de } \mathcal{S} \textit{ minorée dans } \mathcal{S} \\ \textit{admet une borne inférieure dans } X \textit{ qui appartient à } \mathcal{S},\end{array} \tag{5}$$

soit $\mathcal{S}$ vérifie

$$\begin{array}{c}\textit{toute suite de } \mathcal{S} \textit{ minorée dans } \mathcal{S} \\ \textit{admet une borne inférieure dans } X \textit{ qui appartient à } \mathcal{S}.\end{array}$$

Alors max $\mathcal{V}$ *existe si et seulement si $\mathcal{V}$ est non vide et majorée dans $\mathcal{S}$.*

Preuve. Considérons $u_0 \in \mathcal{V}$ et $u^0 \in \mathcal{S}$ majorant $\mathcal{V}$; définissons pour tout u dans $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{u \in \mathcal{S};\ u_0 \leqq u \leqq u^0\}$

$$\boldsymbol{M}u = \inf\{u, Mu, J^i_{\lambda_k}(u + \lambda_k v_i), i \in I, k \in \mathbf{N}\}.$$

D'après (b), $\boldsymbol{M}u$ est bien définie et appartient à $\mathcal{S}$. Il est clair que $\boldsymbol{M}u \leqq u \leqq u^0$; d'un autre coté, puisque $u_0 \leqq u$ et $u_0 \in \mathcal{V}$, on a $u_0 \leqq Mu_0 \leqq Mu$ et $u_0 \leqq J^i_{\lambda_k}(u_0 + \lambda_k v_i) \leqq J^i_{\lambda_k}(u + \lambda_k v_i)$ et donc $u_0 \leqq \boldsymbol{M}u$. En résumé, $\boldsymbol{M}$ applique $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ dans lui-même. Puisque M et les applictions $J^i_{\lambda_k}$ sont descendantes sur $\mathcal{S}$, il est clair que $\boldsymbol{M}$ est descendante sur $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Nous allons maintenant utiliser le lemme suivant dont la vérification est immédiate.

LEMME 3. *Soit $\mathcal{S}$ un ensemble ordonné et $\boldsymbol{M}$ une application de $\mathcal{S}$ dans lui-même. On suppose*

(a) *$\mathcal{S}$ admet un plus grand élément,*

(b) *pour toute suite décroissante (u_n) de $\mathcal{S}$, $u = \inf u_n$ existe et $\boldsymbol{M}u = \inf \boldsymbol{M}u_n$.*

Alors $\boldsymbol{u} = \max\{u \in \mathcal{S}, \boldsymbol{M}u = u\}$ existe; plus précisément on a $\boldsymbol{M}^n(\max \mathcal{S}) \downarrow \boldsymbol{u}$.

FIN DE LA PREUVE DE LA PROPOSITION 2. D'après le lemme on a l'existence de $\boldsymbol{u} = \max\{u \in \mathcal{S}, \boldsymbol{M}u = u\}$ et $\boldsymbol{u} = \inf \boldsymbol{M}^n u^0$; montrons que $\boldsymbol{u} = \max \mathcal{V}$. Il est clair, d'après la définition de $\boldsymbol{M}$, que $\boldsymbol{u}$ est dans $\mathcal{V}$; maintenant étant donné u dans $\mathcal{V}$, on montre facilement par récurrence, en utilisant la croissance de M et des résolvantes $J^i_{\lambda_k}$, que $u \leqq \boldsymbol{M}^n u^0$ pour tout n et donc $u \leqq \boldsymbol{u}$.

REMARQUE 2. La méthode utilisée ci-dessus est standard en théorie du potentiel; elle est en particulier utilisée par C. Dellacherie dans [16], [17] pour l'étude d'opérateurs non-linéaires dans des espaces de fonctions numériques. Nous tenons d'ailleurs à remercier C. Dellacherie pour les conversations qui nous ont amené à l'énoncé de la proposition 2 dans ce cadre abstrait.

Bien que les hypothèses de la proposition 2 soient beaucoup plus satisfaisantes pour les applications que (2), le résultat ne fornit pas encore un procédé très constructif pour déterminer $\max \mathcal{V}$. Nous allons maintenant développer la *méthode de pénalisation*.

Introduisons la notation suivante.

DÉFINITION 1. Etant donné f dans X, notons $U_f = \{u \in U,\ u \leqq f\}$. On appelle *projection sur U*, notée P_U, l'application $f \to \max U_f$ définie sur $D(P_U) = \{f \in X;\ \max U_f \text{ existe}\}$.

Il est clair que $U \subset D(P_U) \subset (f \in X;\ U_f \neq \varnothing\}$ et que P_U est un projecteur croissant de $D(P_U)$ sur U. Notons les propriétés simples suivantes:

PROPOSITION 4. *Supposons $U \subset \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ vérifie*

(7) *toute suite décroissante de $\mathcal{S}$ minorée dans $\mathcal{S}$ admet une borne inférieure dans X qui appartient à $\mathcal{S}$.*

(i) *P_U vérifie*

pour toute suite (u_n) de $D(P_U) \cap \mathcal{S}$ et $u \in \mathcal{S}$ tels que $u_n \downarrow u$ et $(P_U u_n)$ minorée dans $\mathcal{S}$, on a $u \in D(P_U)$ et $P_U u_n \downarrow P_U u$

si et seulement si U vérifie

(8) *pour toute suite* (u_n) *de* U *et* $u \in \mathscr{S}$ *tels que* $u_n \downarrow u$, *on a* $u \in U$.

(ii) *Supposons de plus que* U *vérifie la condition* (a) *de la proposition* 2 *et que pour tout* u *dans* $\mathscr{S}$, $\boldsymbol{M}u = \inf(u, Mu)$ *existe et appartienne à* $\mathscr{S}$. *Alors* $D(P_U) \cap \mathscr{S} = \{f \in \mathscr{S};\ U_f \neq \emptyset\}$ *et pour tout* $f \in D(P_U) \cap \mathscr{S}$, *on a* $\boldsymbol{M}^n f \downarrow P_U f$.

PREUVE. Le point (i) est immédiat. Pour le point (ii), il est immédiat que l'on a $D(P_U) \cap \mathscr{S} \subset \{f \in \mathscr{S};\ U_f \neq \emptyset\}$; maintenant étant donné $f \in \mathscr{S}$ et $\boldsymbol{u} \in U_f$, considérant $\mathscr{S} = \{u \in \mathscr{S};\ \boldsymbol{u} \leqq u \leqq f\}$, il est clair que $\boldsymbol{M}$ est une application descendante de $\mathscr{S}$ dans lui-même et $P_U f = \max\{u \in \mathscr{S}; \boldsymbol{M}u = u\}$; on achève grâce au lemme 3.

REMARQUE 3. (i) Sous les hypothèses de la proposition 4, si U vérifie (8) et $D(P_U)$ contient $\mathscr{S}$, alors U vérife la condition (a) de la proposition 2 avec, pour application M, la restriction de P_U à $\mathscr{S}$.

(ii) Si $U = \{u \in X;\ u \leqq u_0\}$ où u_0 est fixé dans X, alors $P_U f = \inf(f, u_0)$.

Pour énoncer le résultat principal concernant la méthode de pénalisation, nous allons nous restreindre au cas d'un seul opérateur A_i. Comme nous le montrerons ci-dessous, sous les hypothèses (b) de la proposition 2, le cas d'une famille quelconque (A_i) pourra s'y réduire en se plaçant dans l'espace X^I des familles (u_i) d'éléments de X. Pour un temps nous supposons donc I réduit à un seul éléments et notons A et v le pré-générateur et l'élément de X correspondant; on a donc

$$\mathscr{V} = \{u \in U;\ Au \leqq v\}.$$

THÉORÈME 5. *On suppose* I *réduit à un élément. En plus des hypothèses* (3) *et* (4), *on suppose* $\mathscr{V}$ *non vide et*

(a) $\mathscr{S}$ *vérifie* (7), $U \subset \mathscr{S}$ *et* U *vérifie* (8),

(b) $D(P_U)$ *contient tout élément de* $D(A) \cap \mathscr{S}$ *majorant* $\mathscr{V}$,

(c) *il existe* $w \in D(P_U)$ *sur-potentiel de* v *par rapport à* A *majorant* $\mathscr{V}$.

Alors

(i) *Pour tout entier* k, *on peut définir une suite* (u_n) *de* $D(P_U)$ *par*

$$u_0 = w, \quad u_{n+1} = J_{\lambda_k}(P_U u_n + \lambda_k v) \qquad \textit{pour tout } n \tag{9}$$

et on a $u_n \downarrow u^k$, *où* u^k *est la plus grande solution du problème "pénalisé"*

$$u \in D(P_U) \cap \mathscr{S}, \qquad Au + (1/\lambda_k)(u - P_U u) \ni v; \tag{10}$$

(ii) *la suite* (u^k) *est décroissante et minorée et* inf u^k *est sous-potentiel régulier de* v *par rapport à* A.

(iii) *L'ensemble* $\mathscr{V}$ *admet un plus grand élément et*

$$\max \mathscr{V} = \inf P_U u^k = P_U(\inf u^k), \tag{11}$$

$$\inf u^k = \inf\{J_\lambda(\max \mathscr{V} + \lambda v); \lambda > 0 \text{ avec } \lambda\omega(A) < 1\}. \tag{12}$$

Avant de donner la démonstration du théorème, montrons comment l'on peut réduire le cas d'une famille (A_i), (v_i) au cas précédent. Notons $\boldsymbol{X}$ l'espace X^I, $\boldsymbol{v} = (v_i)$ et $\boldsymbol{A}$ l'opérateur diagonal (A_i); identifions X au sous-espace diagonal de $\boldsymbol{X}$, c'est à dire identifions u dans X avec la famille (u_i) de $\boldsymbol{X}$ telle que $u_i = u$ pour tout i. Sous les hypothèses (3) et (4), il est clair que $\boldsymbol{A}$ est un pré-générateur de $\boldsymbol{X}$ avec $\omega(\boldsymbol{A}) \leqq \sup \omega(A_i)$, que les données $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mathscr{S}} = \mathscr{S}^I)$ vérifie (3) et (4), et que l'on a

$$u \in \mathscr{V} \Leftrightarrow u \in U \quad \text{et} \quad \boldsymbol{A}u \leqq \boldsymbol{v}.$$

En d'autres termes déterminer $\max \mathscr{V}$ dans X revient à déterminer $\max \boldsymbol{\mathscr{V}}$ dans $\boldsymbol{X}$, où $\boldsymbol{\mathscr{V}} = \{\boldsymbol{u} \in U; \boldsymbol{Au} \leqq \boldsymbol{v}\}$.

Maintenant, $\boldsymbol{P}_U$ désignant la projection sur U dans $\boldsymbol{X}$, étant donné $(f_i) \in \boldsymbol{X}$ tel que $f = \inf f_i$ existe dans X, on a $(f_i) \in D(\boldsymbol{P}_U)$ si et seulement si $f \in D(P_U)$ et, losque c'est le cas, $\boldsymbol{P}_U(f_i) = P_U f$. Donc si $U \subset \mathscr{S}$ et la condition (b) de la Proposition 2 est satisfaite, la restriction de $\boldsymbol{P}_U$ à $\boldsymbol{\mathscr{S}} = \mathscr{S}^I$ est définie par $\boldsymbol{P}_U(f_i) = P_U(\inf f_i)$ avec

$$D(\boldsymbol{P}_U) \cap \boldsymbol{\mathscr{S}} = \{(f_i) \in \boldsymbol{\mathscr{S}}; (f_i) \text{ est minorée dans } \mathscr{S} \text{ et } \inf f_i \in D(P_U)\}.$$

On a donc comme corollaire immédiat du théorème

COROLLAIRE 6. *En plus des hypothèses* (3) *et* (4), *on suppose* $\mathscr{V}$ *non vide et*

(a) $\mathscr{S}$ *vérifie la condition* (b) *de la proposition* 2, $U \subset \mathscr{S}$ *et* U *vérifie* (8),

(b) $D(P_U)$ *contient* $\inf u_i$ *pour toute famille* (u_i) *de* $\mathscr{S}$ *telle que pour tout* i, $u_i \in D(A_i)$ *et* u_i *soit un majorant de* $\mathscr{V}$,

(c) *Il existe une famille* (w_i) *dans* X *telle que pour tout* i, w_i *soit un sur-potentiel de* v_i *par rapport à* A_i *majorant* $\mathscr{V}$, *et* $\inf w_i$ *soit dans* $D(P_U)$.

Alors

(i) *Pour tout entier* k, *il existe une plus grande solution* $u^k = (u_i^k)$ *du système "pénalisé"*

$$\begin{aligned} &u_i \in \mathscr{S} \text{ pour tout } i, \qquad u = \inf u_i \in D(P_U) \qquad \text{et} \\ &A_i u_i + (1/\lambda_k)(u_i - P_U u) \ni v_i \qquad \text{pour tout } i \in I. \end{aligned} \tag{13}$$

(ii) *Pour tout i dans I,* $\inf_k u_i^k$ *existe et est sous-potentiel régulier de v_i par rapport à A_j.*

(iii) *L'ensemble $\mathscr{V}$ admet un plus grand élément et*

$$\max \mathscr{V} = \inf_k P_U(\inf_i u_i^k) = P_U(\inf_{k,i} u_i^k), \tag{14}$$

$$\inf_k u_i^k = \inf\{J_\lambda^i(\max \mathscr{V} + \lambda v_i);\ \lambda > 0 \text{ avec } \lambda\omega(A_i) < 1\} \quad \textit{pour tout } i. \tag{15}$$

Remarque 4. Supposons que $D(P_U)$ contienne les éléments de $\mathscr{S}$ majorant au moins un élément de U (cf. Proposition 4(ii)); alors l'hypothèse (b) du théorème et du corollaire est satisfaite. Quant à l'hypothèse (c), supposant que $D(P_U)$ contienne tous les éléments de X majorant au moins un élément de U, elle est impliquée par $\omega(A_i) < 0$ pour tout i; en effet dans ce cas on peut prendre $w_i = A_i^{-1}v_i$: il est clair que w_i est un sur-potentiel de v_i par rapport à A_i et est un majorant de $\mathscr{V}$.

Remarque 5. Lorsque $U = \mathscr{S}$, la projection P_U est l'identité sur $\mathscr{S}$. Le système pénalisé (13) s'écrit alors

$$u_i \in \mathscr{S}, \quad A_i u_i + (1/\lambda_k)(u_i - \inf\{u_j; j \neq i\})^+ \ni v_i \quad \text{pour tout } i \in I. \tag{16}$$

En particulier lorsque $I = \{1, 2\}$, il s'écrit

$$u_1, u_2 \in \mathscr{S}, \quad A_1 u_1 + (1/\lambda_k)(u_1 - u_2)^+ \ni v_1, \quad A_2 u_2 + (1/\lambda_k)(u_2 - u_1)^+ \ni v_2.$$

Cette pénalisation a été utilisée, nous semble-t-il pour la première fois dans [18], pour l'étude du problème de Hamilton–Jacobi–Bellman

$$\max(A_1 u - v_1, A_2 u - v_2) = 0.$$

Preuve du Théorème. Pour simplifier les notations, nous poserons $P = P_U$ et pour tout entier k, nous désignerons par T_k l'application définie sur $D(P)$ par $T_k u = J_{\lambda_k}(Pu + \lambda_k v)$; notons que T_k applique $D(P)$ dans $\mathscr{S}$. Avec ces notations, la récurrence (9) s'écrit

$$u_0 = w, \quad u_{n+1} = T_k u_n. \tag{17}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier n, u_n est bien défini, u_n est dans $D(P)$, $T_k u_n \leqq u_n$ et $u_n \geqq u$ pour tout u dans $D(P)$ vérifiant

$$u \leqq w, \quad u \leqq T_k u. \tag{18}$$

C'est vrai pour $n = 0$, puisque w est dans $D(P)$ et $T_k w \leqq J_{\lambda_k}(w + \lambda_k v) \leqq w$. Supposons-le vrai pour n; u_{n+1} est alors bien défini et majore tout élément u dans $D(P)$ vérifiant (18); en particulier il majore les éléments de $\mathscr{V}$ et donc d'après l'hypothèse (b), u_{n+1} est dans $D(P)$; enfin puisque $u_{n+1} \leqq u_n$, par hypothèse de récurrence, on a $T_k u_{n+1} \leqq T_k u_n = u_{n+1}$.

Ceci prouve que la suite (u_n) vérifiant (9) est bien définie, qu'elle est décroissante et minorée par tout u dans $D(P)$ vérifiant (18) et donc en particulier par tout élément de $\mathscr{V}$. Puisque $\mathscr{V}$ est non vide, $u^k = \inf u_n$ existe; grâce à (8) (cf. proposition 4(i)), u^k est solution de

$$u \in D(P), \quad u = T_k u, \tag{19}$$

c'est à dire du problème pénalisé (10); aussi u^k majore tout u dans $D(P)$ vérifiant (18) et donc, en particulier est solution maximum de (10).

Soient u dans $D(P)$ vérifiant (18) et $\lambda \geqq \lambda_k$ avec $\lambda\omega(A) < 1$; utilisant l'identité résolvante, on a

$$Pu \leqq u \leqq T_k u = J_\lambda(Pu + \lambda v + (1 - (\lambda/\lambda_k)(T_k u - Pu)) \leqq J_\lambda(Pu + \lambda v). \tag{20}$$

Appliquant en particulier (20) avec $u = u^k$ et $\lambda = \lambda_l$ avec $l \leqq k$, on obtient $u^k \leqq T_l u^k$ et donc $u^k \leqq u^l$; donc la suite (u^k) est décroissante.

Considérons $\boldsymbol{u} = \inf u^k$; $\boldsymbol{u}$ majore $\mathscr{V}$ et l'on a, en utilisant la proposition 4(i) et en passant à la limite dans (20) appliquée avec $u = u^k$,

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u} \in D(P) \text{ et } P\boldsymbol{u} = \inf Pu^k \leqq \boldsymbol{u} \leqq J_\lambda(P\boldsymbol{u} + \lambda v) \\ \text{pour tout } \lambda > 0 \text{ avec } \lambda\omega(A) < 1. \end{gathered}$$

Ceci prouve bien que $P\boldsymbol{u} = \max \mathscr{V}$ ainsi que $\boldsymbol{u} \leqq \inf\{J_\lambda(\max \mathscr{V} + \lambda v);\ \lambda > 0, \lambda\omega(A) < 1\}$. Enfin on a

$$\begin{aligned} \inf\{J_\lambda(\max \mathscr{V} + \lambda v); \lambda > 0, \lambda\omega(A) < 1\} &\leqq \inf\{J_\lambda(\boldsymbol{u} + \lambda v); \lambda > 0, \lambda\omega(A) < 1\} \\ &\leqq T_k u^k = u^k \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \inf\{J_\lambda(\max \mathscr{V} + \lambda v); \lambda > 0, \lambda\omega(A) < 1\} \\ &= \inf\{J_\lambda(\boldsymbol{u} + \lambda v); \lambda > 0, \lambda\omega(A) < 1\}. \end{aligned}$$

Remarque 6. Il apparaît clairement dans la preuve ci-dessus qu'au lieu de l'hypothèse $\mathscr{V} \neq \varnothing$, nous aurions pu supposer que pour tout k, la suite (u_n) solution de (9) était bien définie (ce qui correspond à une hypothèse sur $D(P_U)$), et était minorée indépendament de k dans $\mathscr{S}$. Ceci sera utilisé dans [5], sous des hypothèses d'accrétivité, pour obtenir des résultats généraux d'existence de max $\mathscr{V}$.

REMARQUE 7. La méthode de pénalisation est standard pour l'étude d'inéquations variationnelles et a été introduite pour l'étude de problèmes quasi-variationnelles dans [9]. Avec nos notations, ils considéraient dans un cadre variationnel (cf. section 2.D) avec une partie U vérifiant la condition (a) de la proposition 2, le problème pénalisé

$$u \in \mathscr{S}, \quad Au + (1/\lambda_k)(u - Mu)^+ \ni v.$$

Nous développerons les résultats pour ce mode plus général de pénalisation dans [5]. La méthode de pénalisation comprend une immense littérature (cf. [10], [11]); nous nous contenterons d'indiquer que la formulation très générale donnée ici a été préparée par les résultats de [2], [4], [6], [7].

REFERENCES

1. W. Arendt et al., *One-parameter semi-groups of positive operators* (R. Nagel, ed.), Lecture Notes in Math. **1184**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
2. L. Barthélemy, *Application de la théorie des opérateurs sous-potentiels au controle stochastique*, in *Contributions to Nonlinear Partial Differnetial Equations*, Volume II (Diaz and Lions, eds.), Longman, 1987.
3. L. Barthélemy, *Problème d'obstacle pour une équation quasi-linéaire du premier ordre*, à paraître, Ann. Fac. Sc. Toulouse.
4. L. Barthélemy et Ph. Bénilan, *Phénomène de couche limite pour la pénalisation d'inéquations quasi-variationnelles elliptiques avec conditions de Dirichlet au bord*, Séminaire du Collège de France, 1985.
5. L. Barthélemy et Ph. Bénilan, *Opérateurs sous-potentiels de type accrétif*, en préparation.
6. L. Barthélemy et F. Catte, *Application de la théorie des semi-groupes non linéaires dans L^∞ à l'étude d'une classe d'inéquations quasi-variationnelles*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse **IV** (1982).
7. Ph. Bénilan et F. Catte, *Equations d'évolution du type $du/dt + \max A_i u = f$ par la théorie des semi-groupes non linéaires dans L^∞*, C.R. Acad. Sci. Paris, série 1, **295** (1982).
8. Ph. Bénilan, M. G. Crandall et A. Pazy, *Evolution equation governed by accretive operators*, livre à paraitre.
9. A Bensoussan, M. Goursat et J. L. Lions, *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles stationnaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, série A, **276** (1973).
10. A. Bensoussan et J. L. Lions, *Applications des inéquations variationnelles au contrôle stochastique*, M.M.I. 6, Dunod, Paris, 1978.
11. A. Bensoussan et J. L. Lions, *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles*, M.M.I. 11, Dunod, Paris, 1982.
12. G. Birkhoff, *Lattice theory*, Am. Math. Soc. Colloquium, Vol. XXV, 1948.
13. H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Math. St. 5, North-Holland, 1973.
14. H. Brézis, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. Inst. Fourier **XVIII** (1968).
15. B. Calvert, *When T-accretive implies accretive*, preprint.
16. C. Dellacherie, *Les sous-noyaux élémentaires*, in *Théorie du potentiel — Colloque Deny*, Lecture Notes in Math. **1096**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
17. C. Dellacherie, *Théorie élémentaire du potentiel non linéaire*, Séminaire d'Initiation à l'Analyse, Paris VI, 1986.

18. C. Evans et P. L. Lions. *Résolution des équations de H.J.B. pour les équations uniformément elliptiques*. C.R. Acad. Sci. Paris, série 1, **290** (1980).

19. P. A. Meyer. *Probabilités et potentiel*. Publ. Inst. Math. Strasbourg. XIV Actual. Sci. Ind. 1318. Hermann, 1966.

20. R. Nagel et H. Uhlig. *An abstract Kato inequality for generators of positive operators semigroups on Banach lattices*. J. Operator Theory. n° 6 (1981).